

## LE STRUTTURE IPERSTATICHE

- 1) LA DEFORMABILITÀ DEI CORPI
- 2) LA LEGGE DI HOOKE
- 3) LE PROVE SUI MATERIALI DA COSTRUZIONE
- 4) LE DEFORMAZIONI PER FLESSIONE
- 5) TEOREMI DI MOHR
- 6) LE TRAVI CONTINUE (Equazione dei 3 momenti di CLAPEYRON)
- 7) ANALISI DELLA SINGOLA CAMPATA

## 1) LA DEFORMABILITÀ DEI CORPI

Nella risoluzione delle strutture isostatiche non abbiamo tenuto conto delle deformazioni che la struttura subisce sotto l'effetto dei carichi esterni, confondendo la configurazione della trave deformata con quella iniziale.

Tale ipotesi risulta valida nella risoluzione delle strutture isostatiche per le quali si applicano le 3 equazioni fondamentali della statica dei sistemi rigidi:

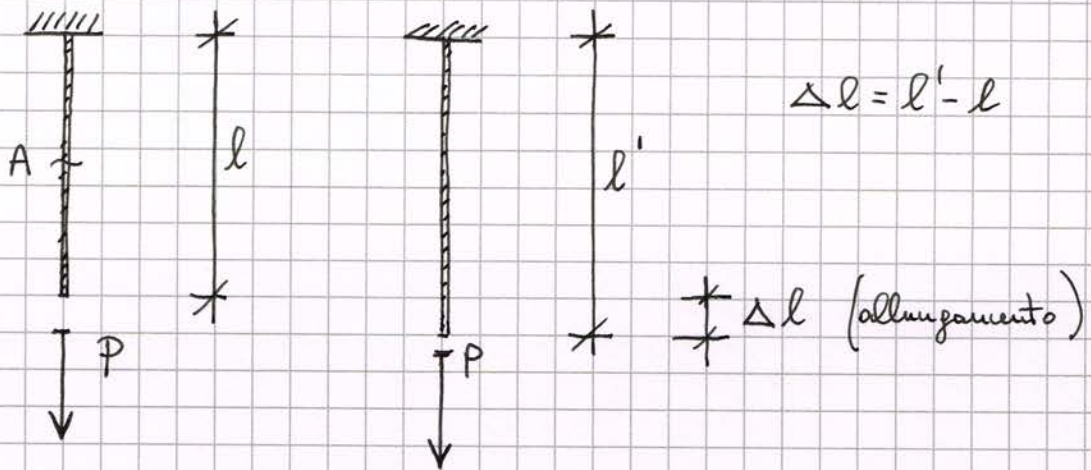
$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Somme delle forze verticali} \quad \Sigma F_v = 0 \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{orizzontali} \quad \Sigma F_o = 0 \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{dei momenti} \quad \Sigma M = 0 \end{array} \right.$$

Per la risoluzione delle strutture iperstatiche è necessario tenere conto delle deformazioni che la struttura subisce per effetto dei carichi esterni.

Tali deformazioni dipendono dalla natura del materiale e dalle sue caratteristiche di elasticità.

## 2) LA LEGGE DI HOOKE

Consideriamo un'asta di sezione "A" vincolata ad un estremo e soggetta all'azione di un carico "P".



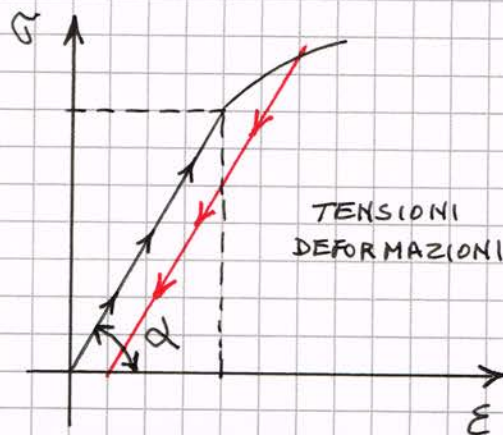
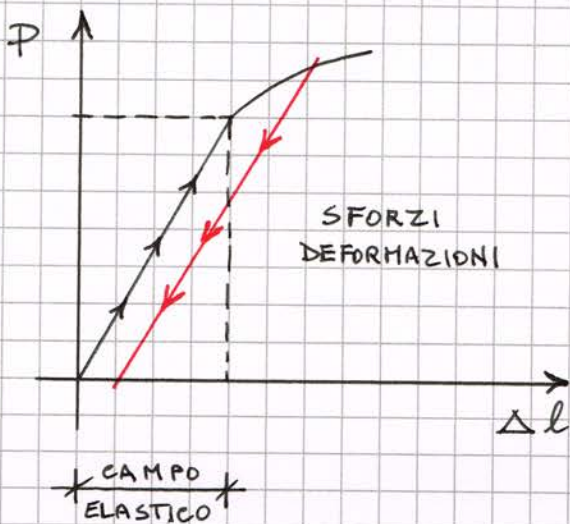
Per effetto del carico "P" l'asta subisce un allungamento  $\Delta l$  la cui entità è espressa dalla seguente relazione:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}$$

Il parametro "E" che dipende dalla natura del materiale prende il nome di MODULO DI ELASTICITÀ

Se rappresentiamo in un diagramma cartesiano l'andamento della deformazione  $\Delta l$  in funzione del carico P noteremo che la deformazione è di tipo elastica fino ad un determinato valore di P oltre il quale l'asta subisce deformazioni di tipo permanente.

DIAGRAMMI "P-Δ" e "σ-ε"



Per stabilire un criterio più generale che non tiene conto della forma del provino si definiscono due quantità convenzionali:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{TENSIONE UNITARIA}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{DILATAZIONE UNITARIA}$$

L'espressione  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EA}$  può essere scritta come  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

da cui deriva la "LEGGI DI HOOKE"

$$\sigma = E \epsilon$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{modulo di elasticità o di YOUNG})$$

Ripartiamo valori di "E" (ricavati con prove di laboratorio) per materiali utilizzati in edilizia:

- ACCIAIO	E = 210000 daN/cm <sup>2</sup>	≡ 210000 N/mm <sup>2</sup>
- CALCESTRUZZO	E = 300000 "	≡ 300000 "
- LEGNO	E = 80000 "	≡ 80000 "
- MURATURA (Mattoni pieni)	E = 70000 "	≡ 70000 "

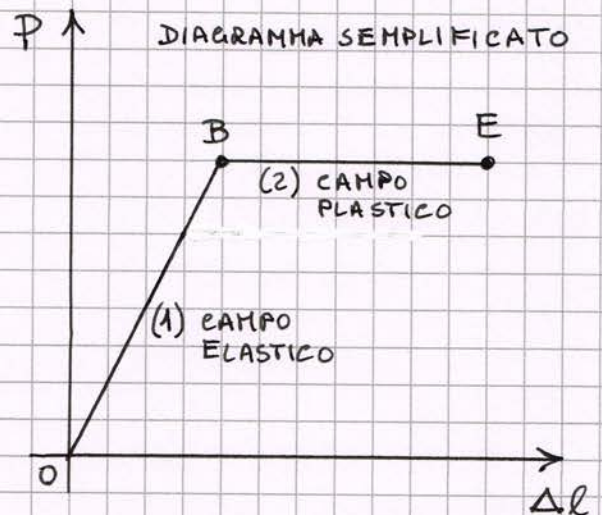
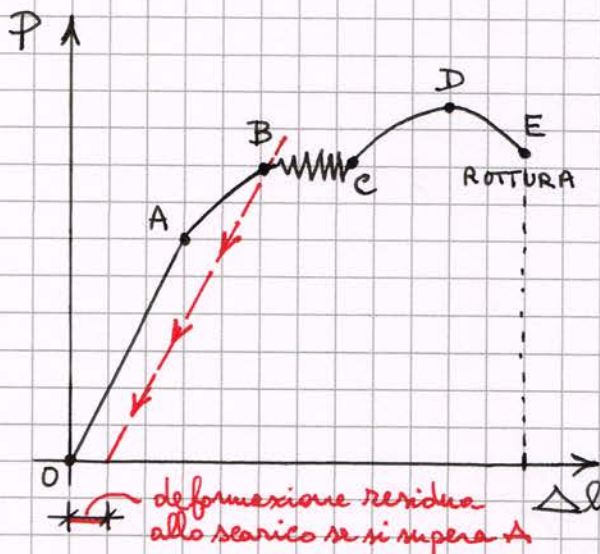
### 3) LE PROVE SUI MATERIALI DA COSTRUZIONE

MATERIALI  $\left\{ \begin{array}{l} \text{OMOGENEI} \\ \text{ETEROGENEI} \end{array} \right.$

MATERIALI  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ISOTROPI} \quad (\text{Acciaio}) \\ \text{ANISOTROPI} \quad (\text{Legno}) \end{array} \right.$

Per poter stabilire le caratteristiche di resistenza dei materiali occorre sottoporli a prove di laboratorio che si distinguono essenzialmente in prove di TRAZIONE o COMPRESSIONE

#### PROVA DI TRAZIONE ACCIAIO



O - A 1<sup>a</sup> FASE CAMPO ELASTICO LINEARE

A - B 2<sup>a</sup> " " " NON LINEARE

B - C 3<sup>a</sup> " SNERVAMENTO ( $\Delta l$  aumenta sotto carico costante)

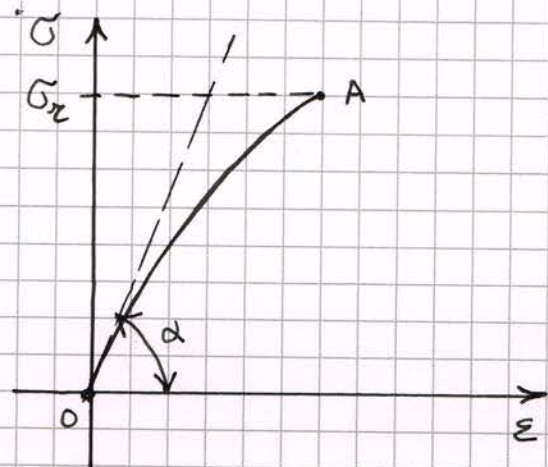
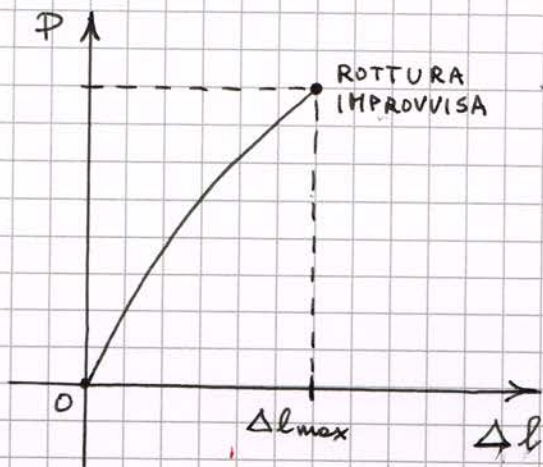
C - D 4<sup>a</sup> " CAMPO PLASTICO (notevoli deformazioni con piccole variazioni di carico)

D - E 5<sup>a</sup> " " " (Nel punto D si ha il fenomeno della strizione con successiva rottura in E)



## PROVA DI COMPRESSIONE CALCESTRUZZO

La prova di compressione sul calcestruzzo è eseguita su provini cubici di dimensioni normalizzate  $15 \times 15 \times 15$  cm -

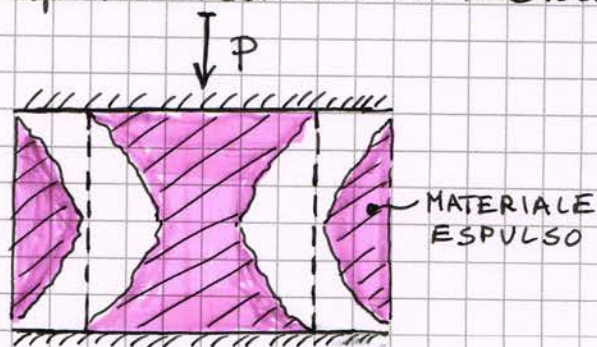


$$\sigma_R = R_{ck} \text{ (Resistenza cubica)}$$

$$E = \operatorname{tg} \alpha \text{ (Modulo di elasticità)}$$

La rottura nel calcestruzzo si verifica senza che si manifestino grandi deformazioni e in maniera improvvisa, per cui il calcestruzzo è definito un materiale fragile -

Mentre nella prova di trazione sull'acciaio si ha il fenomeno della strizione con riduzione dell'area  $A$  della sezione, nella prova di compressione sul calcestruzzo si ha il fenomeno dell'espansione laterale con conseguente espulsione laterale del materiale -

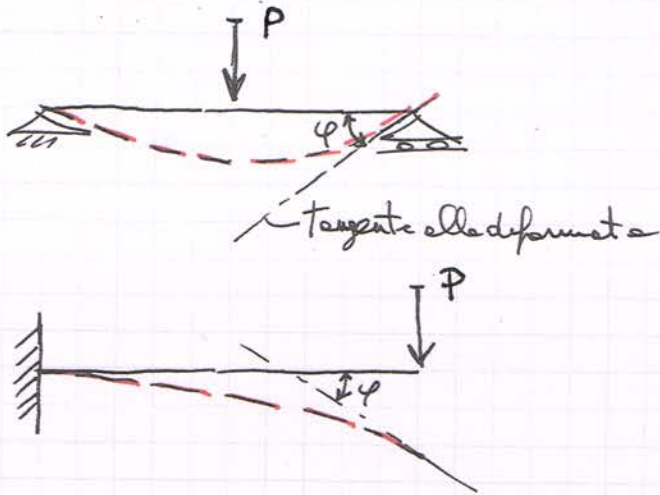


PIANI DI  
ROTTURA  
A  $45^\circ$

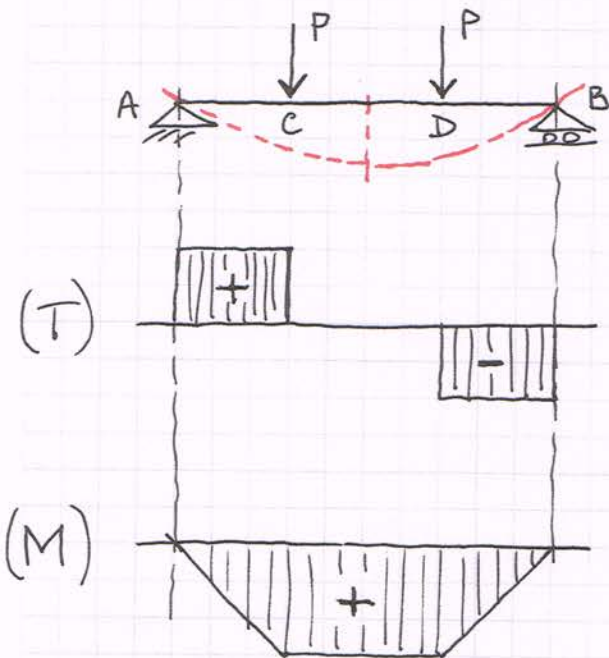
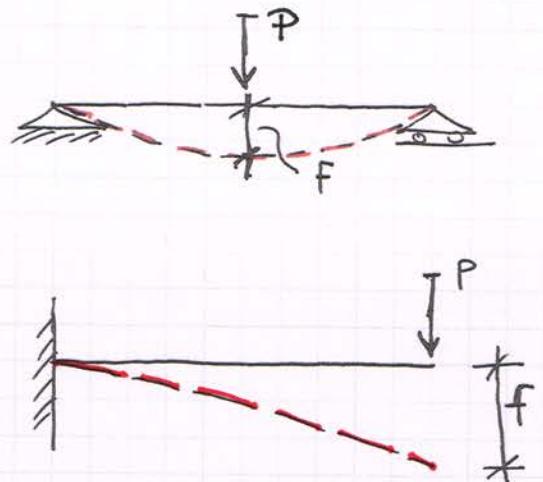
# 4) LE DEFORMAZIONI PER FLESSIONE

Le deformazioni per flessione :

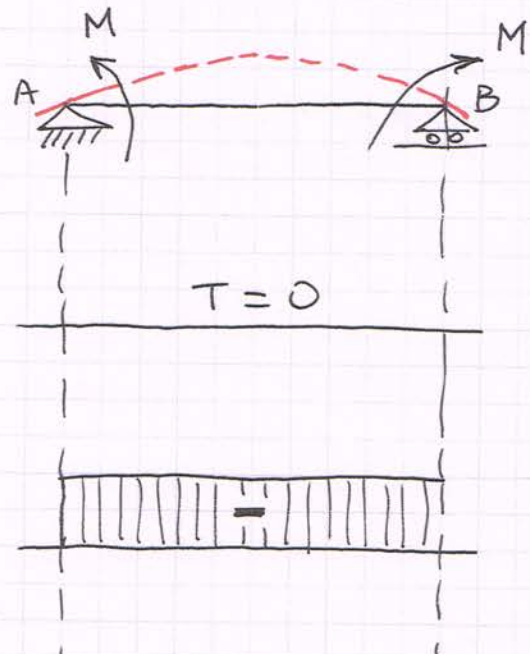
## Rotazione



## Abbassamento



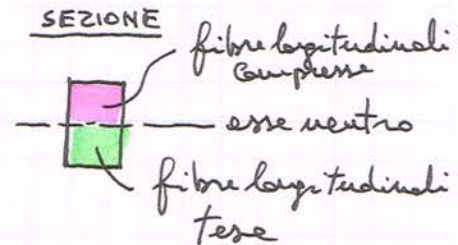
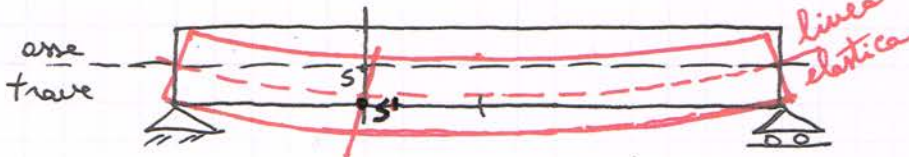
Nel tratto CD c'è flessione pura



Nel tratto AB c'è flessione pura



## La deformazione per flessione semplice



Linea elastica = asse geometrico del solido deformato

La generica sezione subisce un abbassamento e una rotazione -

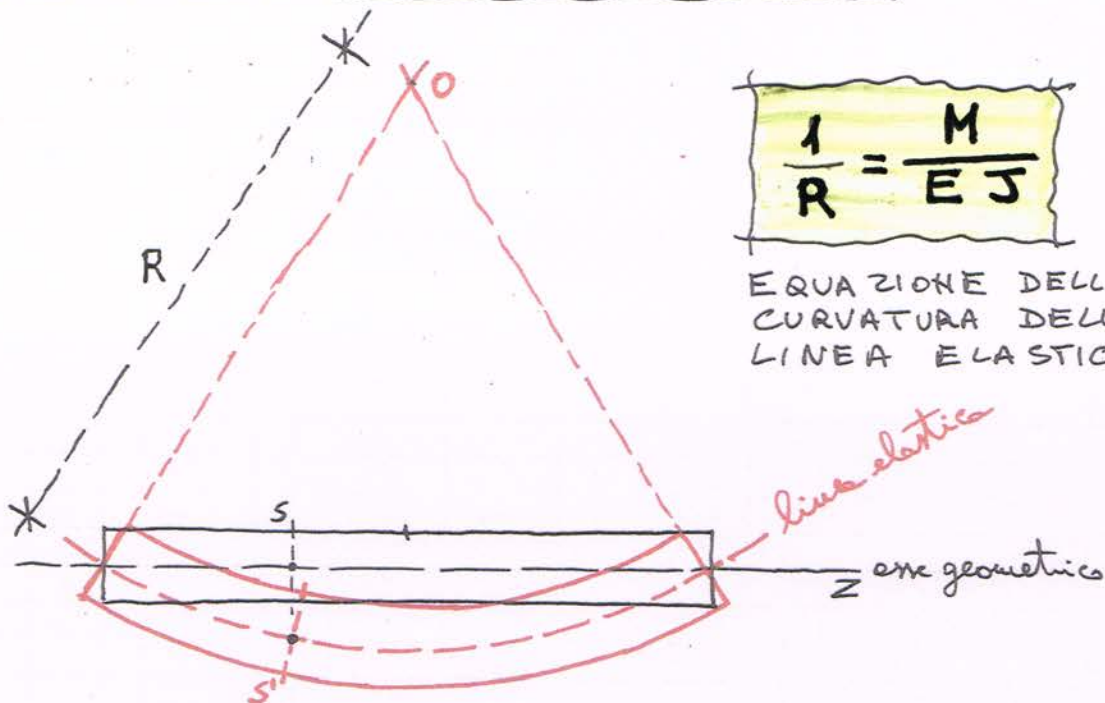
Abbassamento o freccia elastica = distanza fra un punto  $S$  sull'asse geometrico indeformato e la corrispondente posizione  $S'$  sulla linea elastica

Rotazione = angolo che la tangente alla linea elastica in un punto forma con l'asse geometrico indeformato

essendo la sottile tangente perpendicolare al piano della sezione retta nella trave deformata, tale angolo corrisponde a quello formato da una generica sezione passando dalla posizione originaria  $S$  a quella  $S'$  nella trave deformata

N.B. In tutte le trattazioni si ipotizza la conservazione delle sezioni piane

## La linea elastica e la sua curvatura

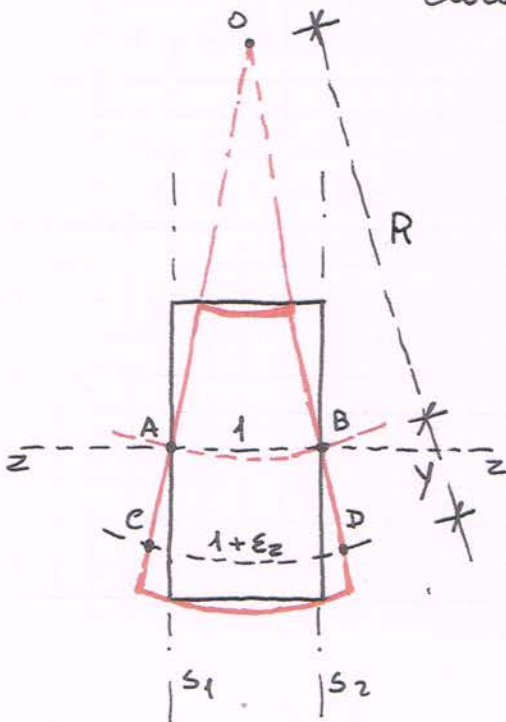


$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

EQUAZIONE DELLA CURVATURA DELLA LINEA ELASTICA

L'asse geometrico del solido deformato presenta una curvatura con raggio "R" molto grande

$$\text{curvatura} = \frac{1}{R}$$



Consideriamo due sezioni  $S_1$  e  $S_2$  a distanza unitaria. La fibra a distanza  $y$  dall'asse neutro subisce un allungamento da 1 a  $1 + \epsilon_z$ .

Dato il valore molto grande di "z" gli archi  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  possono essere approssimati a tratti rettilinei, per cui della similitudine dei due triangoli  $OAB$  e  $OCD$  risulta:

$$\frac{1 + \epsilon_z}{1} = \frac{z + y}{z} \Rightarrow \epsilon_z = \frac{y}{R}$$

Dalla legge di Hooke  $\sigma_z = E \epsilon_z$

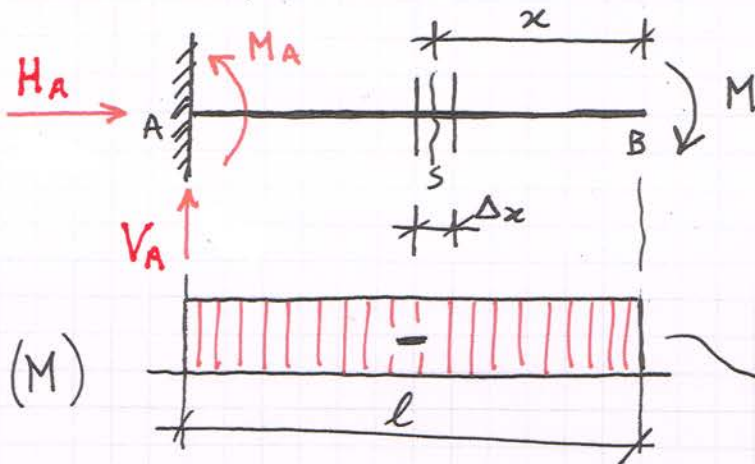
$$\sigma_z = E \frac{y}{R}$$

Dalla formula di Navier (flexione)  $\sigma_z = \frac{My}{J}$

$$E \frac{y}{R} = \frac{My}{J} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

## La deformazione per flessione nella trave a mensola

Si considera una trave a mensola soggetta ad un momento  $M$  applicato all'estremità



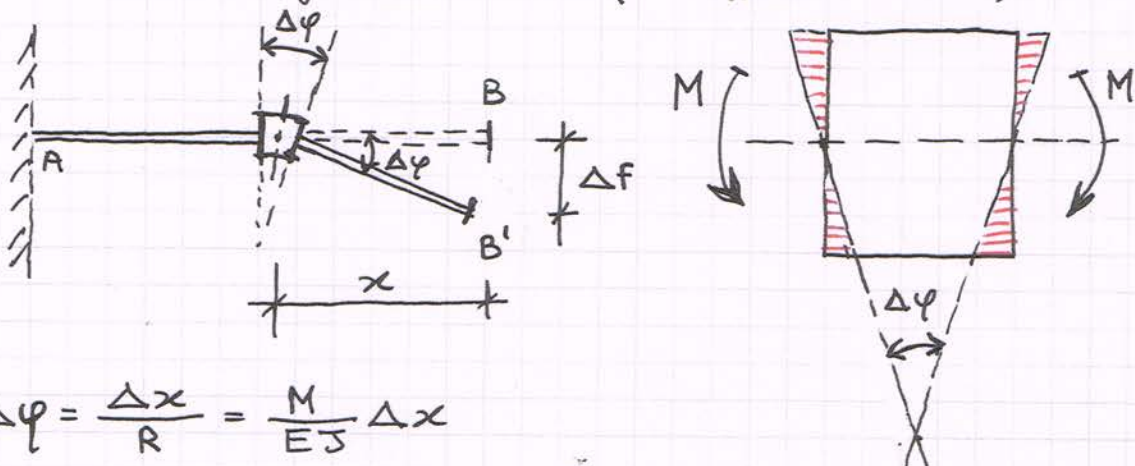
Reazioni vincolari:

$$\begin{cases} V_A = 0 \\ H_A = 0 \\ M_A = -M \end{cases}$$

(M)  $\rightarrow$  diagramma del momento costante

Consideriamo ora un tratto di trave di lunghezza elementare  $\Delta x$  a cavallo della sezione  $S$  posta a distanza  $x$  dall'estremo  $B$

Supponiamo rigidi i due tratti di trave a sinistra e a destra del tratto considerato deformabile ( $R =$  raggio di curvatura)



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{R} = \frac{M}{EJ} \Delta x$$

$$\Delta F = x \sin \Delta\varphi \cong x \Delta\varphi \quad \left( \text{essendo } \Delta\varphi \text{ molto piccolo si può assumere } \sin \Delta\varphi = \Delta\varphi \right)$$

$$f = \sum \Delta F = \sum x \Delta\varphi = \sum x \frac{M \Delta x}{EJ}$$

L'abbondamento  $f$  è il momento statico di un sistema di masse del tipo  $\frac{M\Delta x}{EJ}$  rispetto ad una retta passante per il punto B e perpendicolare all'asse trave -

La risultante delle suddette masse (tre loro uguali) vale:  $\frac{Ml}{EJ}$  ed è posta a distanza  $\frac{l}{2}$  per cui:

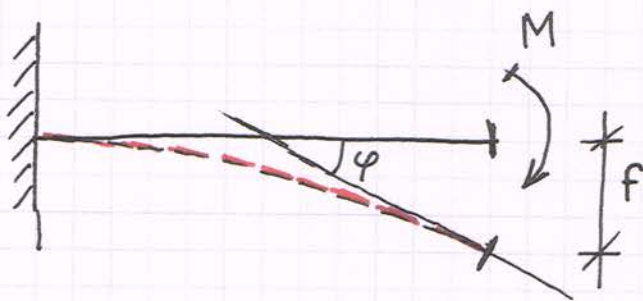
$$f = \frac{Ml}{EJ} \frac{l}{2} = \frac{Ml^2}{2EJ}$$

Analogamente:

$$\varphi = \sum \Delta\varphi = \sum \frac{M\Delta x}{EJ}$$

La rotazione  $\varphi$  è la risultante di un sistema di masse del tipo  $\frac{M\Delta x}{EJ}$

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ}$$



## 5) TEOREMI DI MOHR

12/6

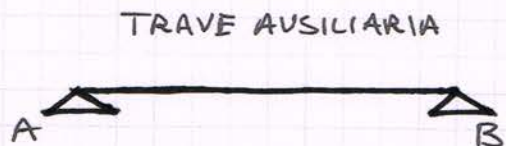
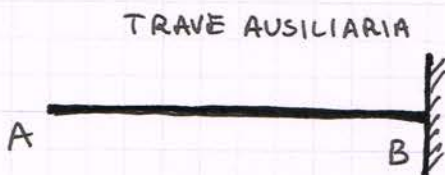
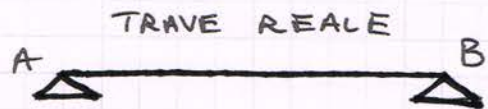
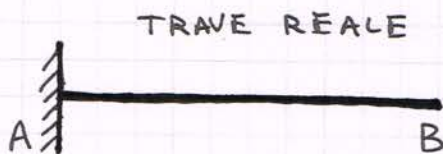
### Le deformazioni per flessione nelle travi isostatiche (Teoremi di MOHR)

#### 1° Teorema

Le rotazioni (in radianti) di una trave inflessa coincidono con le sollecitazioni di taglio di una trave ausiliaria caricata con un carico  $q^* = \frac{M}{EJ}$

#### 2° Teorema

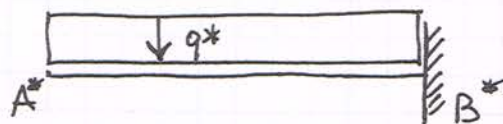
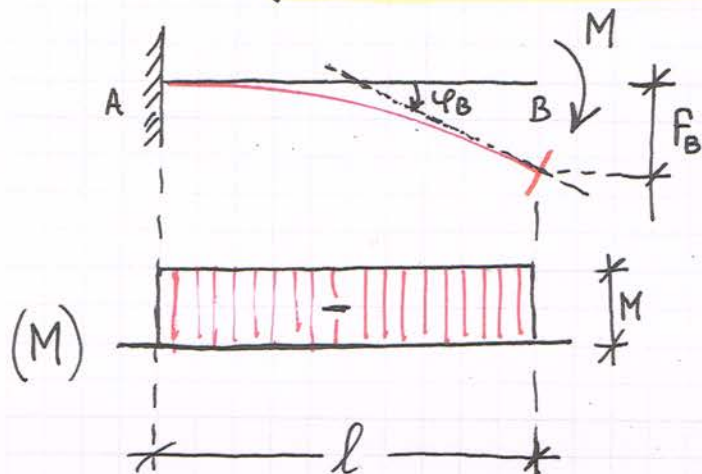
Gli abbandamenti di una trave inflessa coincidono con le sollecitazioni di momento di una trave ausiliaria caricata con un carico  $q^* = \frac{M}{EJ}$



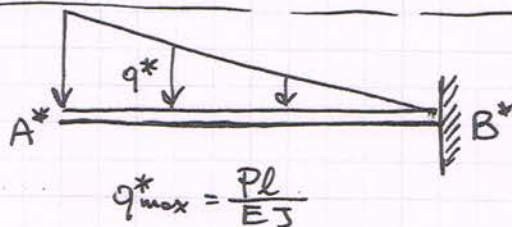
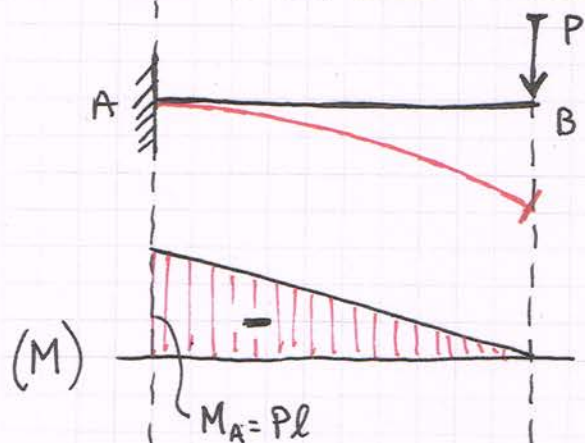
Applicazione dei teoremi di MOHR

$$(q^* = \frac{M}{EJ})$$

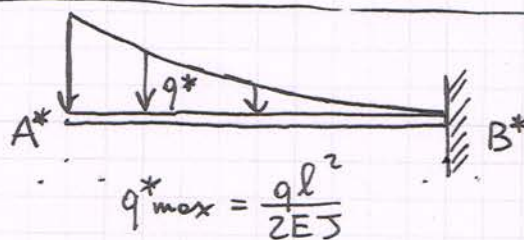
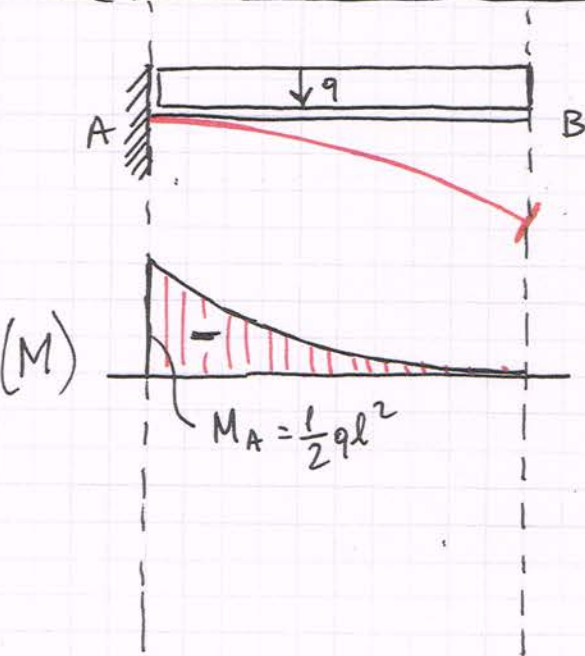
(TRAVE INCASTRATA A MENSOLO)



$$\left\{ \begin{aligned} F_B = M_B^* &= \frac{Ml^2}{2EJ} \\ \varphi_B = T_B^* &= \frac{Ml}{EJ} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} F_B = M_B^* &= \frac{Pl^3}{3EJ} \\ \varphi_B = T_B^* &= \frac{Pl^2}{2EJ} \end{aligned} \right.$$

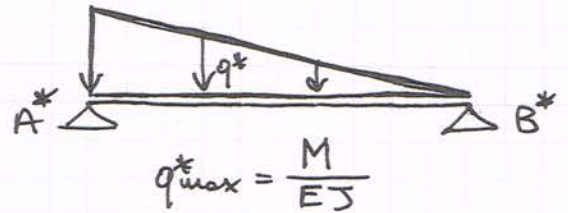
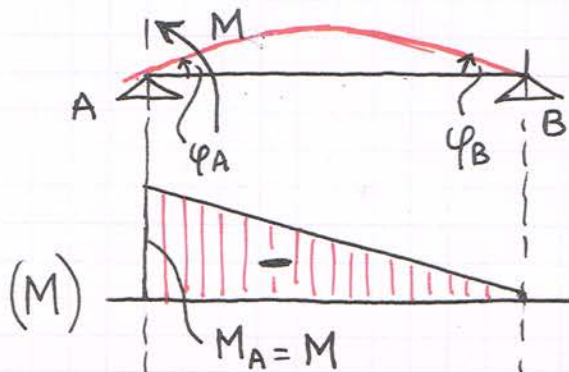


$$\left\{ \begin{aligned} F_B = M_B^* &= \frac{ql^4}{8EJ} \\ \varphi_B = T_B^* &= \frac{ql^3}{6EJ} \end{aligned} \right.$$

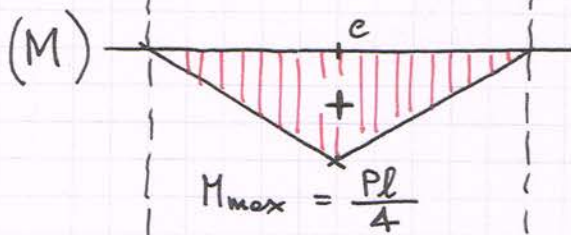
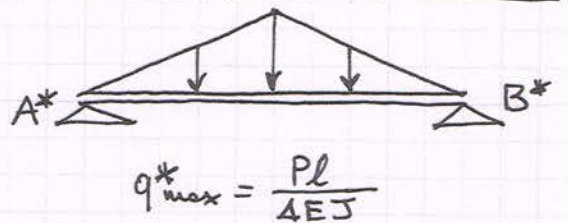
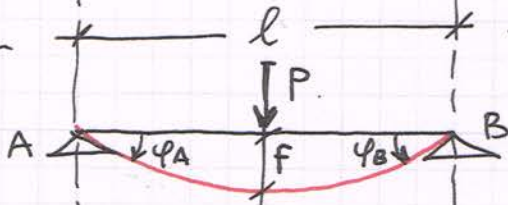
# Applicazioni dei teoremi di MOHR

(TRAVE APPOGGIATA)

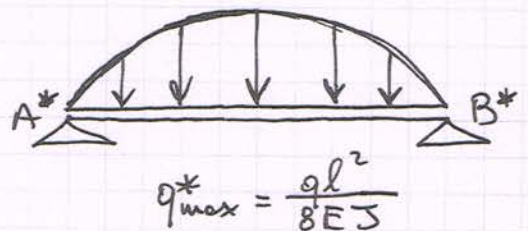
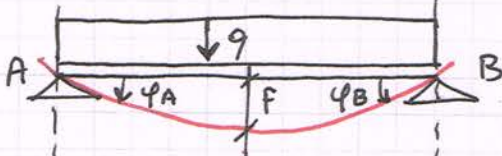
$$(q^* = \frac{M}{EJ})$$



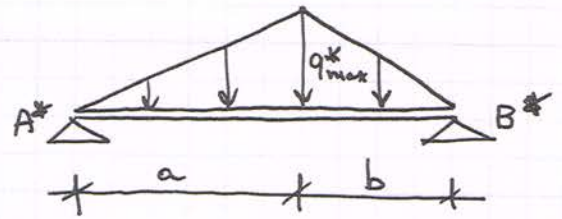
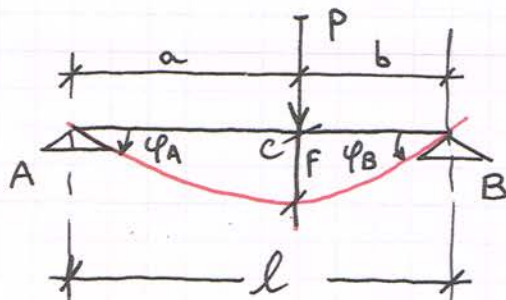
$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Ml}{3EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Ml}{6EJ} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Pl^2}{16EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Pl^2}{16EJ} \\ F_c = M_c^* = \frac{Pl^3}{48EJ} \end{cases}$$

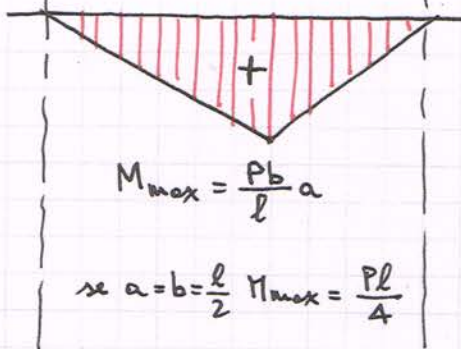


$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{ql^3}{24EJ} \\ F_c = M_c^* = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$



$$q_{max}^* = \frac{Pab}{lES}$$

(M)



$$M_{max} = \frac{Pb}{l}a$$

$$\text{se } a=b=\frac{l}{2} \quad M_{max} = \frac{Pl}{4}$$

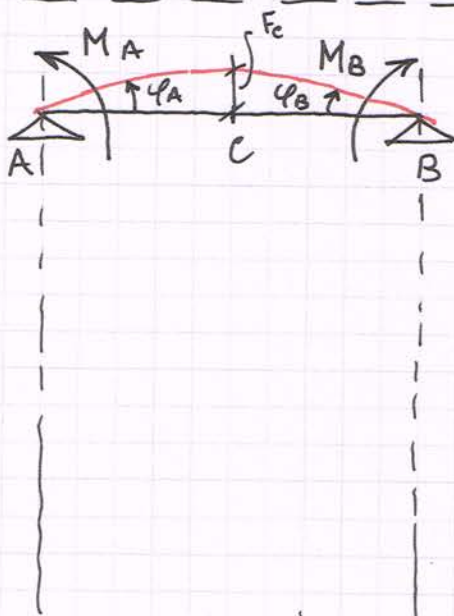
$$f_c = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = T_A^* = \frac{Pb}{6lES} (l^2 - b^2) \\ \varphi_B = T_B^* = \frac{Pa}{6lES} (l^2 - a^2) \end{cases}$$

$$\text{Per } a=b=\frac{l}{2}$$

$$\varphi_A = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$$



$$\varphi_A = \frac{MA l}{3EJ} + \frac{MB l}{6EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{MA l}{6EJ} + \frac{MB l}{3EJ}$$

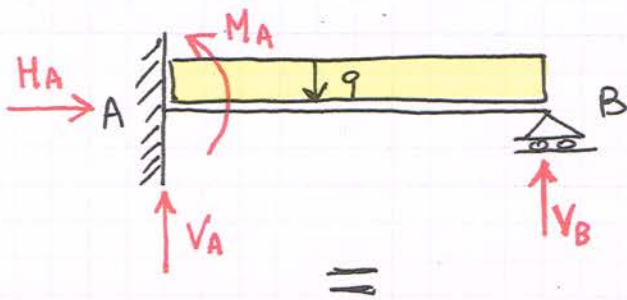
N.B. per  $M_A = M_B$ 

$$f_c = \frac{Ml^2}{8EJ} \quad (\text{in mezzetta})$$

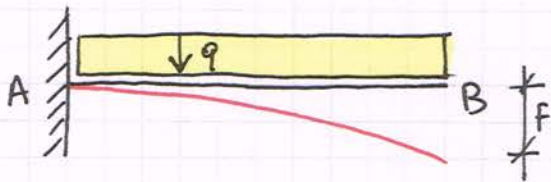


Le strutture iperstatiche ad una campata

Trave incastata con appoggio: (carico distribuito)

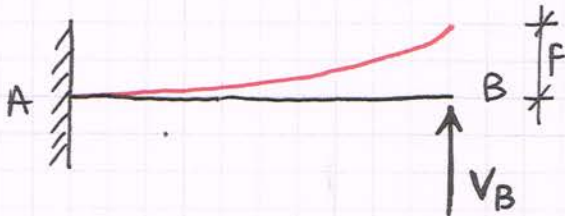


4 incognite



$$f_B(q) = \frac{ql^4}{8ES}$$

+



$$f_B(V_B) = -\frac{V_B l^3}{3ES}$$

Supponendo che la somma delle frecce dovute ai due diversi tipi di carico risulta nulla (il punto B non può spostarsi in verticale)

$$f_B(q) + f_B(V_B) = 0$$

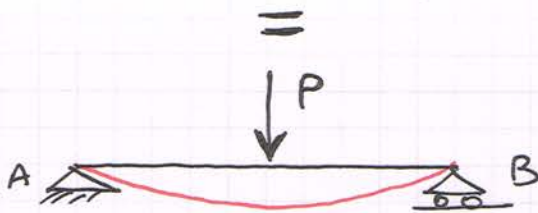
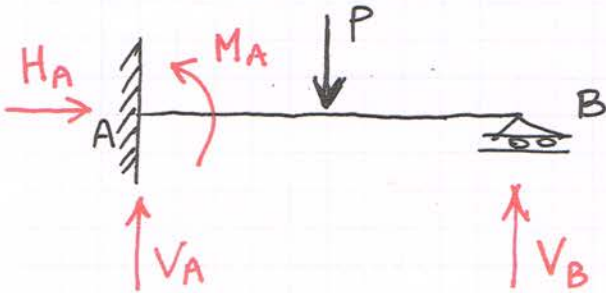
risulta:

$$\frac{ql^4}{8ES} - \frac{V_B l^3}{3ES} = 0 \implies$$

$$\boxed{V_B = \frac{3}{8} ql}$$

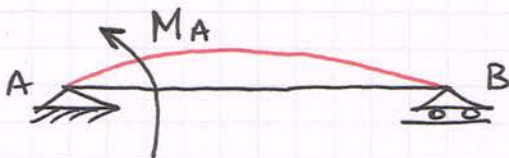
In particolare:  $M_A = \frac{1}{8} ql^2$

Trave incastata con appoggio : (carico eccentrico in mesorima)



$$\varphi_A(P) = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

+



$$\varphi_A(M_A) = -\frac{M_A l}{3EJ}$$

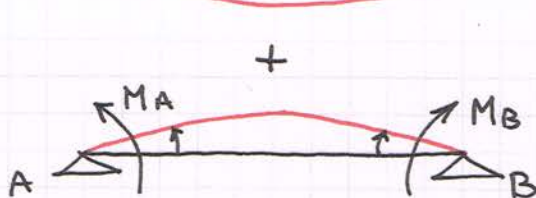
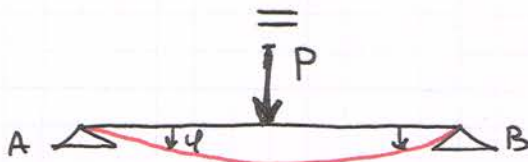
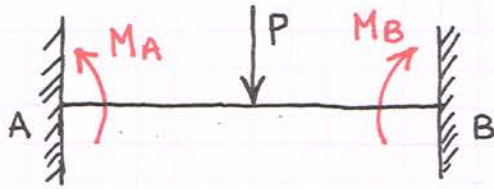
Imponendo che la somma delle rotazioni in "A" dovute ai due diversi tipi di carichi risulta nulla

$$\varphi_A(P) + \varphi_A(M) = 0$$

risulta :

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{M_A l}{3EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = \frac{3}{16} Pl}$$

Trave doppiamente incastrata : (carico concentrato in mezzogiorno)



$$\begin{cases} \varphi_A(P) + \varphi_A(M_A + M_B) = 0 \\ \varphi_B(P) + \varphi_B(M_A + M_B) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_A(P) = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$\varphi_B(P) = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$\varphi_A(M) = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ}$$

$$\varphi_B(M) = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}$$

A meno del termine  $EJ$  (sezione costante e stesso materiale)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Pl^2}{16} - \frac{2M_A l}{6} - \frac{M_B l}{6} &= 0 \\ \frac{Pl^2}{16} - \frac{M_A l}{6} - \frac{2M_B l}{6} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Pl^2}{16} - \frac{2M_A l}{6} - \frac{M_B l}{6} &= 0 \\ \frac{Pl^2}{16} - \frac{M_A l}{6} - \frac{2M_B l}{6} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Pl^2}{16} &= \frac{l}{6} (2M_A + M_B) \\ \frac{Pl^2}{16} &= \frac{l}{6} (M_A + 2M_B) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3}{8} Pl &= 2M_A + M_B \\ \frac{3}{8} Pl &= M_A + 2M_B \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3}{8} Pl &= 2M_A + M_B \\ \frac{3}{8} Pl &= M_A + 2M_B \end{aligned} \right.$$

Moltiplicando la seconda espressione per due e sottraendola alla prima risulta :  $-\frac{3}{8} Pl = 2M_A + M_B - 2M_A - 4M_B \Rightarrow$

$$\boxed{M_B = \frac{Pl}{8}}$$

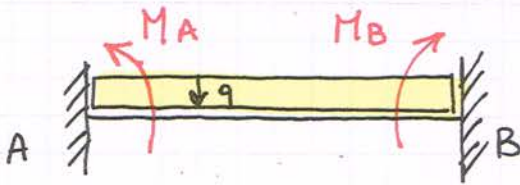
Analogamente  $\Rightarrow$

$$\boxed{M_A = \frac{Pl}{8}}$$

In particolare  $M_{\max}(\frac{l}{2}) = \frac{Pl}{8}$

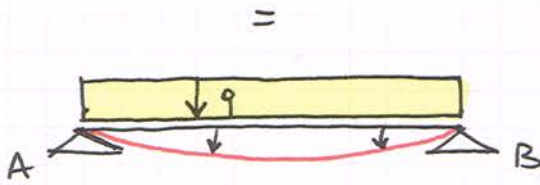
Si fa notare che  $M_A = M_B$  anche per ragioni di simmetria

Trave doppiamente incastrata : (carico distribuito)



$$\varphi_A(q) + \varphi_A(M) = 0$$

$$\varphi_B(q) + \varphi_B(M) = 0$$



$$\varphi_A(q) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_B(q) = \frac{ql^3}{24EJ}$$



$$\varphi_A(M) = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ}$$

$$\varphi_B(M) = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}$$

A meno del termine  $EJ$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ql^3}{24} - \frac{2M_A l}{6} - \frac{M_B l}{6} = 0 \\ \frac{ql^3}{24} - \frac{M_A l}{6} - \frac{2M_B l}{6} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (2M_A + M_B) \\ \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (M_A + 2M_B) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (2M_A + M_B) \\ \frac{ql^3}{24} = \frac{l}{6} (M_A + 2M_B) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} ql^2 = 2M_A + M_B \\ \frac{1}{4} ql^2 = M_A + 2M_B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} ql^2 = 2M_A + M_B \\ \frac{1}{4} ql^2 = M_A + 2M_B \end{array} \right.$$

Moltiplicando la seconda equazione per due e sottraendola alla prima  
risulta :  $-\frac{1}{4} ql^2 = 2M_A + M_B - 2M_A - 4M_B \Rightarrow$

$$M_B = \frac{ql^2}{12}$$

$$M_A = \frac{ql^2}{12}$$

Per particolare  $M_{max}(\frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{24}$

Per simmetria  $M_A = M_B$

Prima di affrontare lo studio delle travi continue si riportano di seguito le formule che esprimono le rotazioni nelle travi appoggiate agli estremi nelle condizioni di carico nel seguito riportate:

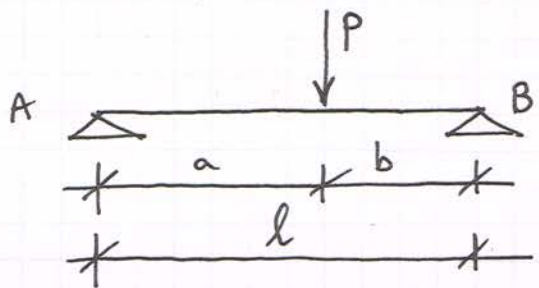


Diagram of a simply supported beam of length  $l$  with a point load  $P$  at distance  $b$  from support  $B$  and  $a$  from support  $A$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2) \right] = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pa}{6l} (l^2 - a^2) \right] = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$

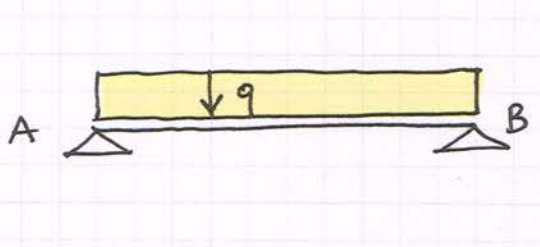


Diagram of a simply supported beam of length  $l$  with a uniformly distributed load  $q$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{24} \right) = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{24} \right) = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$

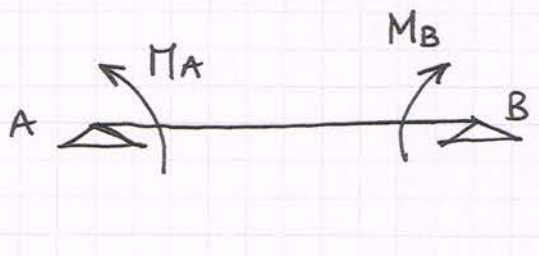


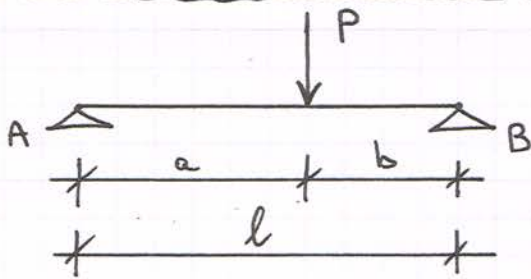
Diagram of a simply supported beam of length  $l$  with moments  $M_A$  and  $M_B$  applied at supports  $A$  and  $B$  respectively.

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} \right) = \frac{A^*}{EJ} \\ \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} \right) = \frac{B^*}{EJ} \end{aligned} \right.$$

Ricordiamo che le rotazioni nella trave reale corrispondono alle rotazioni di Taglio nella trave ausiliaria.

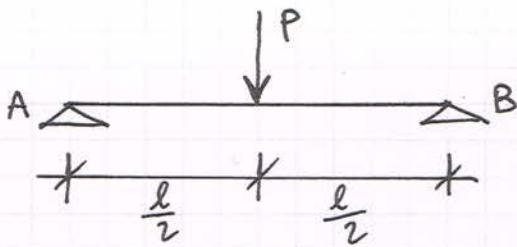
Indichiamo con  $A^*$  e  $B^*$  le reazioni fittizie della trave ausiliaria e meno del termine  $\frac{1}{EJ}$

## REAZIONI FITTIZIE (Trave ausiliaria) (a meno del termine $EJ$ )



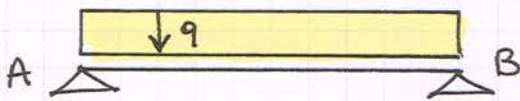
$$A^* = \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2) \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{Pa}{6l} (l^2 - a^2) \quad (D_1^*)$$



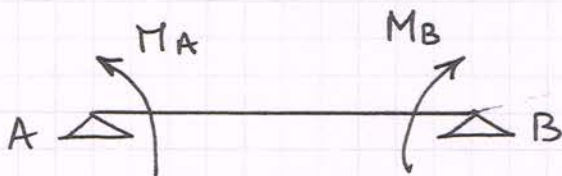
$$A^* = \frac{Pl^2}{16} \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{Pl^2}{16} \quad (D_1^*)$$



$$A^* = \frac{ql^3}{24} \quad (D_2^*)$$

$$B^* = \frac{ql^3}{24} \quad (D_1^*)$$



$$\varphi_A = \frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B)$$

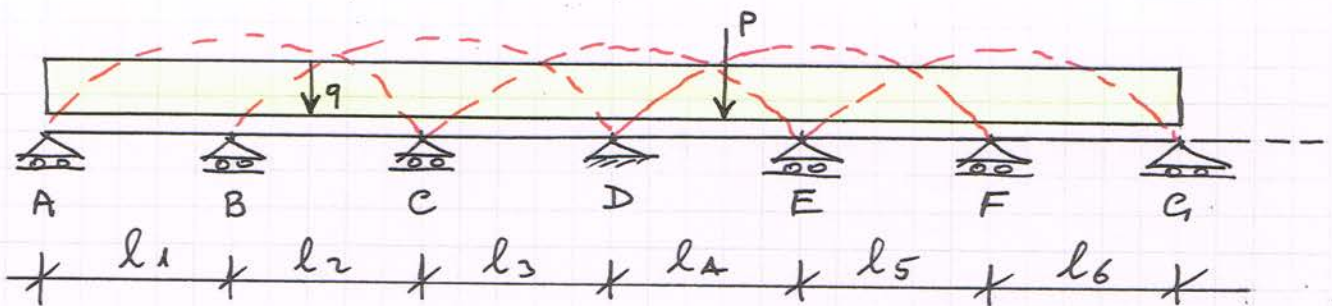
$$\varphi_B = \frac{l}{6EJ} (M_A + 2M_B)$$

## Le travi continue (L'equazione dei tre momenti di CLAPEYRON)

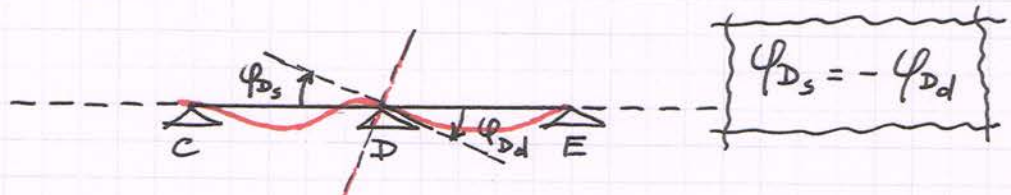
$n$  = numero di appoggi

$i$  = grado di iperstaticità

$$i = n - 2$$



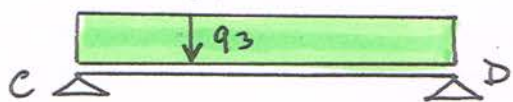
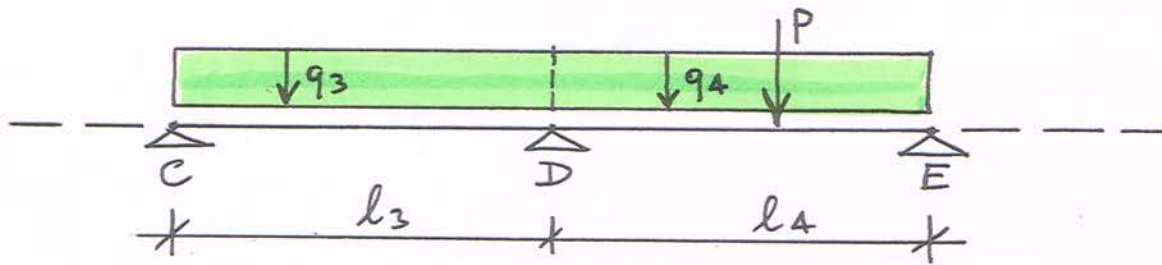
Assunta una trave continua su  $n$  appoggi esaminiamo due campate adiacenti separate dal resto della trave e isolate fra loro:



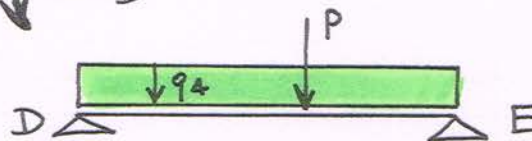
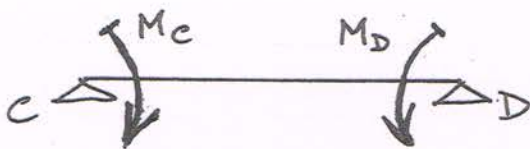
Affinché ogni campata possa essere considerata isolata dal contesto è necessario aggiungere alle estremità i momenti incogniti negli appoggi.

Per effetto della continuità la sezione terminale di ogni campata coincide con la sezione iniziale della campata adiacente e il momento nelle due sezioni deve essere uguale e unico.

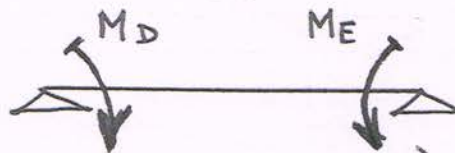
Anche le rotazioni delle due sezioni sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario, perché la rotazione  $\varphi_{D3}$  fa alzare la tangente mentre la  $\varphi_{Dd}$  la fa abbassare.



+



$D_1^*$  } rotazioni (a meno termine  $EJ$ )  
 sull'appoggio D, per la trave a  
 $D_2^*$  } sinistra e quella a destra,  
 per effetto dei carichi



(Consideriamo le rotazioni verso il basso positive)

$$\varphi_{D_s} = \frac{D_1^*}{EJ} + \frac{l_3}{6EJ} (M_C + 2M_D)$$

$$\varphi_{D_s} = -\varphi_{D_d}$$

$$\varphi_{D_d} = \frac{D_2^*}{EJ} + \frac{l_4}{6EJ} (2M_D + M_E)$$

Considerando  $\Sigma$  estante per tutta la trave risulta

$$D_1^* + \frac{l_3}{6} (M_C + 2M_D) = -D_2^* - \frac{l_4}{6} (2M_D + M_E)$$

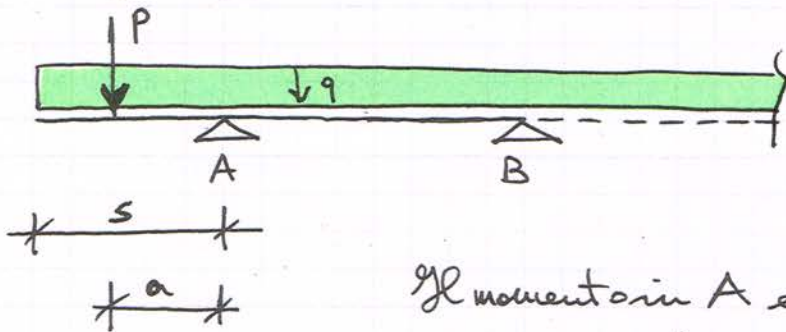
$$6D_1^* + l_3 (M_C + 2M_D) = -6D_2^* - l_4 (2M_D + M_E)$$

$$M_C l_3 + 2M_D (l_3 + l_4) + M_E l_4 = -6 (D_1^* + D_2^*)$$

EQUAZIONE DEI TRE MOMENTI  
 DI CLAPEYRON



## CASI PARTICOLARI ALLE ESTREMITA' di una trave continua

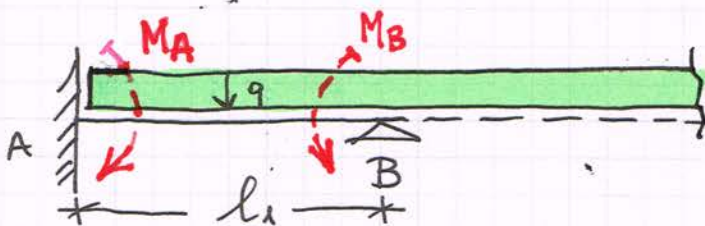
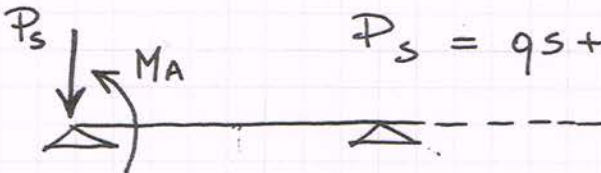


(sbalzo all'estremita')

Il momento in A è un termine noto

$$M_A = -\frac{1}{2}qs^2 - Pa$$

$$P_s = qs + P$$



(incastro all'estremita')

L'ulteriore equazione da introdurre per determinare l'incognita  $M_A$  è quella che corrisponde all'annullamento della rotazione nel punto A essendo la sezione incastata

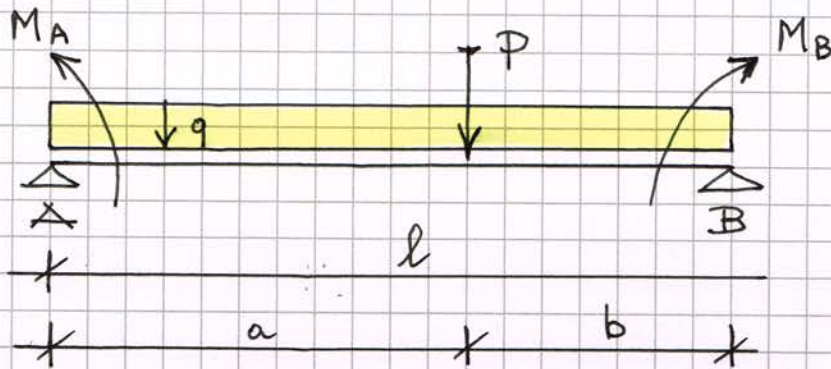
$$\varphi_{Ad} = \frac{D_2^*}{EJ} + \frac{l_1}{6EJ} (2M_A + M_B) = 0$$

$$2M_A l_1 + M_B l_1 = -6D_2^*$$

$$D_2^* = \frac{ql_1^3}{24} \quad (\text{se è presente solo il carico distribuito } q)$$

## ANALISI DELLA SINGOLA CAMPATA

Determinati i valori delle incognite iperstatiche ( $M$ ) si analizzano le singole campate appoggiate-appoggiate con i momenti alle estremità determinati.



Per ogni campata si determinano:

- 1) Le reazioni verticali sugli appoggi A e B

$$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{Pb}{l} + \frac{M_A}{l} - \frac{M_B}{l}$$

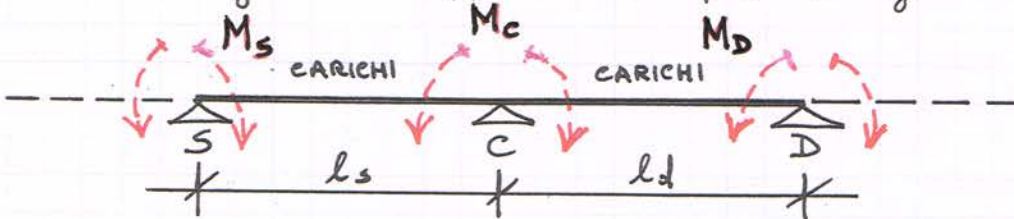
$$V_B = \frac{ql}{2} + \frac{Pa}{l} - \frac{M_A}{l} + \frac{M_B}{l}$$

- 2) La sezione di Taglio nullo dove il Momento è max
- 3) Le sezioni di momento nullo
- 4) Il diagramma della sollecitazione di TAGLIO
- 5) Il diagramma della sollecitazione di MOMENTO

# TRAVI CONTINUE

(EQUAZIONE DEI 3 MOMENTI DI CLAPEYRON)

Si consideri la generica coppia di campate contigue



S = appoggio a sinistra      C = appoggio centrale      D = appoggio a destra  
 $l_s$  = luce campata a sinistra       $l_d$  = luce campata a destra

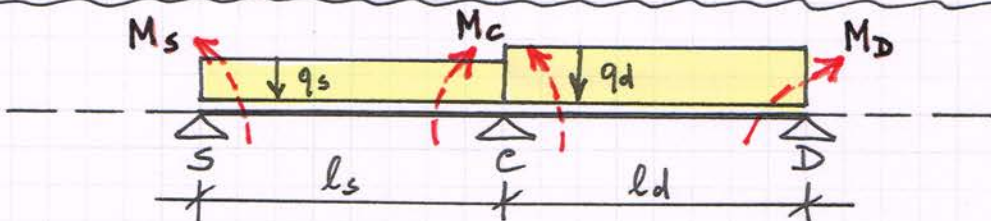
$$M_s l_s + 2 M_c (l_s + l_d) + M_d l_d = -6 (R_1^* + R_2^*)$$

$R_1^*$  = rotazione sull'appoggio centrale C per la trave a sinistra  
 $R_2^*$  = rotazione sull'appoggio centrale C per la trave a destra

per effetto dei carichi sulla campata e meno del termine  $EJ$

N.B. : L'equazione nella formulazione su riportata è valida per trave continua a sezione costante e dello stesso materiale

Il risultato negativo sta ad indicare che il verso del momento è opposto a quello ipotizzato



Nell'ipotesi di carichi sulle campate del tipo uniformemente distribuito l'equazione dei 3 momenti assume la seguente formulazione semplificata:

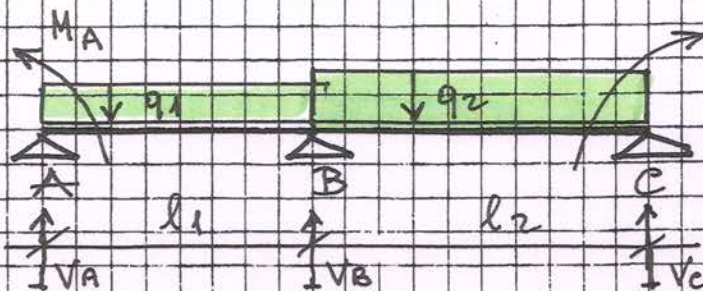
$$8 M_c (l_s + l_d) = q_s l_s^3 + q_d l_d^3 - 4 M_s l_s - 4 M_d l_d$$

# LE TRAVI CONTINUE

(IPERSTATICHE)

## TRAVE CONTINUA A 2 CAMPATE (1 volta iperstatica)

Consideriamo una trave continua a 2 campate soggetta a carichi uniformemente distribuiti e con momenti alle estremità:



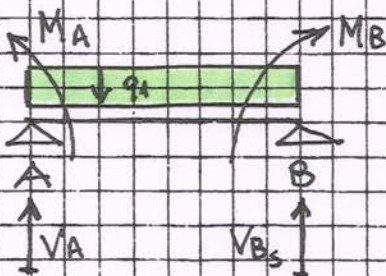
Elementi noti:

$q_1, q_2, M_A, M_C$

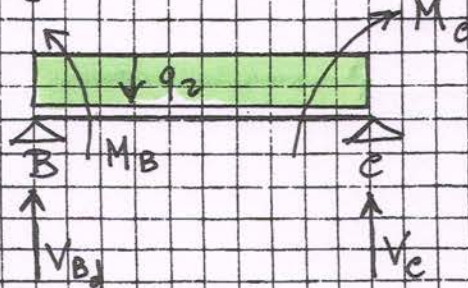
Supp.:

$V_A, V_B, V_C$

Lo schema statico assegnato è possibile da compilare in schemi isostatici in cui compare il momento incognito  $M_B$  sull'appoggio intermedio che si genera per effetto della continuità.

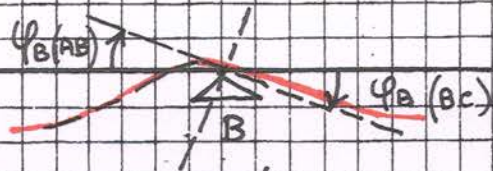


$$V_B = V_{B_s} + V_{B_d}$$



Per effetto della continuità la reazione terminale della campata AB deve coincidere con la reazione iniziale della campata BC.

Per determinare l'incognita iperstatica  $M_B$  abbiamo imposte l'equaglianza in valore assoluto ma di segno contrario delle rotazioni della sezione B considerata prima come sezione terminale della campata AB e poi come sezione iniziale della campata BC.

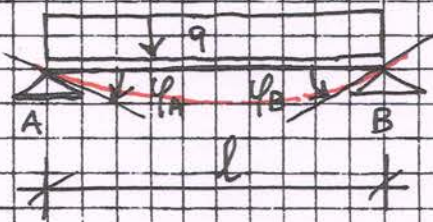


$$\varphi_B(AB) = -\varphi_B(BC)$$

EQUAZIONE AUSILIARIA  
DI CONGRUENZA

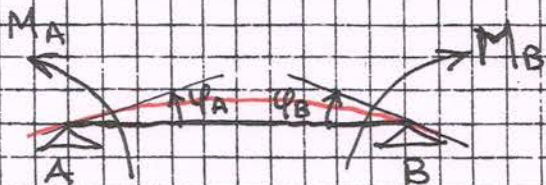
Ripetiamo i valori delle rotazioni alle estremità di una trave (ricavati con i teoremi di MOHR) per le condizioni di carico più significative:

1)



$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A = \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ} \end{array} \right.$$

2)



$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} \\ \varphi_B = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} \end{array} \right.$$

Nel caso della trave continua a 2 campate presa in esame esplicitiamo l'equazione ausiliaria di congruenza delle rotazioni:  $\varphi_B(AB) = -\varphi_B(BC)$

$\varphi_B(AB)$  = rotazione in B considerata la campata AB

$\varphi_B(BC)$  = " " B " " " BC

$$\frac{q_1 l_1^3}{24EJ} - \frac{M_A l_1}{6EJ} - \frac{M_B l_1}{3EJ} = - \left( \frac{q_2 l_2^3}{24EJ} - \frac{M_B l_2}{3EJ} - \frac{M_C l_2}{6EJ} \right)$$

$$\frac{q_1 l_1^3}{24} - \frac{M_A l_1}{6} - \frac{M_B l_1}{3} = - \frac{q_2 l_2^3}{24} + \frac{M_B l_2}{3} + \frac{M_C l_2}{6}$$

Moltiplichiamo tutti i membri dell'equazione per 24

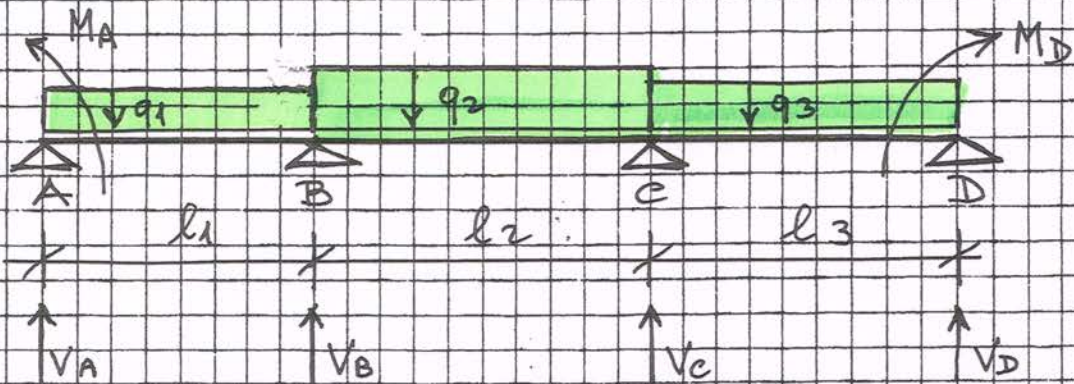
$$q_1 l_1^3 - 4 M_A l_1 - 8 M_B l_1 = -q_2 l_2^3 + 8 M_B l_2 + 4 M_C l_2$$

$$(*) \left\{ 8 M_B (l_1 + l_2) = q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3 - 4 M_A l_1 - 4 M_C l_2 \right\}$$

Dall'espressione su riportata si ricava l'incognita iperstatica " $M_B$ " dopo di che sarà possibile risolvere le singole campate ricorrendo alle equazioni fondamentali della statica dei corpi rigidi.

(\*) Tale espressione dell'equazione dei 3 momenti è valida per travi a sezione costante con carichi uniformemente distribuiti

## TRAVE CONTINUA A 3 CAMPATE (2 volte iperstatica)



Elementi noti :  $q_1, q_2, q_3, M_A, M_D$

Incognite :  $V_A, V_B, V_C, V_D$

Anche in questo caso è possibile considerare ogni singola campata isolata dal contesto purché siano noti i momenti alle estremità -

Nel caso in esame occorre determinare i valori dei momenti in corrispondenza degli appoggi intermedi B e C -

Incognite iperstatiche :  $M_B$  e  $M_C$

Per determinare i valori di  $M_B$  e  $M_C$  ricorriamo alle equazioni ausiliarie di congruenza esaminando le coppie di campate adiacenti :

$$\begin{cases} \varphi_B(AB) = -\varphi_B(BC) \\ \varphi_C(BC) = -\varphi_C(CD) \end{cases}$$

Explicitiamo le 2 equazioni di congruenza in analogia a quanto visto per la trave a 2 campate:

Appoggio B (campate AB + BC)

$$8 M_B (l_1 + l_2) = q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3 - 4 M_A l_1 - 4 M_C l_2$$

Appoggio C (campate BC + CD)

$$8 M_C (l_2 + l_3) = q_2 l_2^3 + q_3 l_3^3 - 4 M_B l_2 - 4 M_D l_3$$

In definitiva otteniamo un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite  $M_B$  e  $M_C$ .

Risolto il sistema e determinati i valori di  $M_B$  e  $M_C$  (incognite iperstatiche) è possibile risolvere le singole campate ricorrendo alle equazioni fondamentali della statica dei corpi rigidi.

## - TRAVE CONTINUA A N CAMPATE

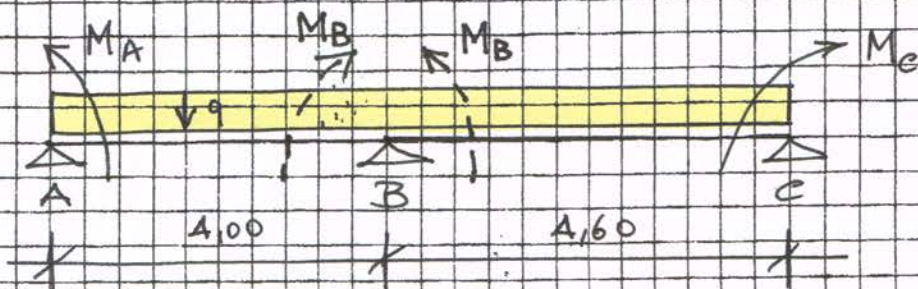
Nella situazione di trave continua a "n" campate le incognite iperstatiche (momenti negli appoggi intermedi) risultano pari a:  $n-1$ .

Occorre quindi risolvere un sistema di  $(n-1)$  equazioni in  $(n-1)$  incognite.

Le equazioni si impostano ricorrendo alle equazioni ausiliarie di congruenza esplicitate per gli  $(n-1)$  appoggi intermedi della trave continua.



### ESERCIZIO PER TRAVE A 2 CAMPATE



$$M_A = 2500 \text{ daNm}$$

$$M_C = 3500 \text{ ,,}$$

$$q = 4000 \text{ daN/m}$$

$$l_1 = 4,00 \text{ mt}$$

$$l_2 = 4,60 \text{ mt}$$

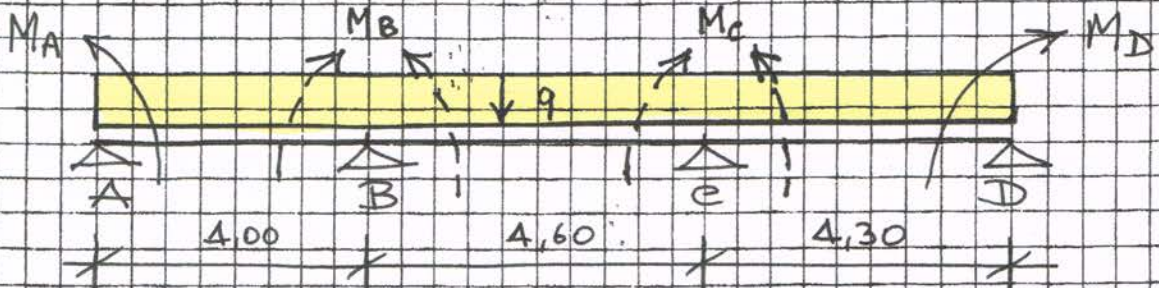
Applichiamo l'equazione di congruenza nella sezione B (appoggio intermedio) per determinare l'incognita iperstatica  $M_B$ .

$$8 M_B (4,00 + 4,60) = 4000 \times 4,00^3 + 4000 \times 4,60^3 - 4 \times 2500 \times 4,00 - 4 \times 3500 \times 4,60$$

$$8 \times 8,60 M_B = 540944$$

$$M_B = \frac{540944}{8 \times 8,60} = \underline{\underline{7862 \text{ daNm}}}$$

## ESERCIZIO PER TRAVE A 3 CAMPATE



$$M_A = 2500 \text{ daNm}$$

$$M_D = 3000 \text{ daNm}$$

$$q = 4000 \text{ daN/m}$$

$$l_1 = 4,00 \text{ mt}$$

$$l_2 = 4,60 \text{ mt}$$

$$l_3 = 4,30 \text{ mt}$$

Per determinare le 2 incognite ipostatiche  $M_B$  e  $M_C$  explicitiamo le equazioni di congruenza prima nella sezione B e poi nella sezione C

$$\begin{cases} 8 M_B (l_1 + l_2) = q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3 - 4 M_A l_1 - 4 M_C l_2 \\ 8 M_C (l_2 + l_3) = q_2 l_2^3 + q_3 l_3^3 - 4 M_B l_2 - 4 M_D l_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 \times 8,60 M_B = 4000 \times 4^3 + 4000 \times 4,60^3 - 4 \times 2500 \times 4,00 - 4 M_C \times 4,60 \\ 8 \times 8,90 M_C = 4000 \times 4,60^3 + 4000 \times 4,30^3 - 4 M_B \times 4,60 - 4 \times 3000 \times 4,30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 68,8 M_B = 605344 - 18,4 M_C \\ 71,2 M_C = 655772 - 18,4 M_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 68,8 M_B = 605344 - 18,4 M_C \\ 71,2 M_C = 655772 - 18,4 M_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 68,8 M_B + 18,4 M_C = 605344 \\ 18,4 M_B + 71,2 M_C = 655772 \end{cases}$$

Moltiplicando i membri della 2<sup>a</sup> equazione per il fattore  $\frac{68,8}{18,4}$  risulta:

$$\begin{cases} 68,8 M_B + 18,4 M_c = 605344 \\ 68,8 M_B + 266,2 M_c = 2452017 \end{cases}$$

Sottraendo la 1<sup>a</sup> equazione alla 2<sup>a</sup> equazione risulta:

$$247,8 M_c = 1846673$$

$$M_c = \underline{7452} \text{ daNm}$$

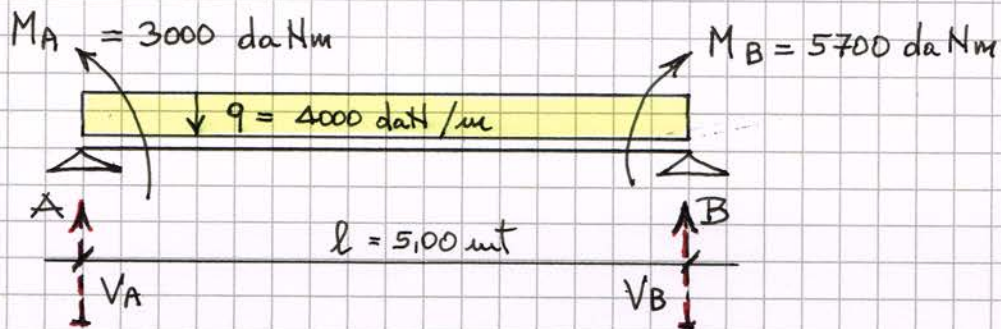
Sostituiamo il valore  $M_c$  determinato nella 1<sup>a</sup> equazione e ricaviamo  $M_B$

$$68,8 M_B = 605344 - 18,4 \times 7452$$

$$M_B = \underline{6805} \text{ daNm}$$

## ANALISI DI UNA SINGOLA CAMPATA

A titolo esemplificativo effettuiamo l'analisi di una campata generica di una trave continua dopo aver determinato le ineguite iperstatiche costituite dai momenti negli appoggi intermedi.



Determiniamo le reazioni  $V_A$  e  $V_B$  applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e cioè calcolando le aliquote di  $V_A$  e  $V_B$  dovute alle varie tipologie di carico:

$$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{M_A}{l} - \frac{M_B}{l} = 10000 + 600 - 1140 = \underline{9460} \text{ daN}$$

$$V_B = \frac{ql}{2} - \frac{M_A}{l} + \frac{M_B}{l} = 10000 - 600 + 1140 = \underline{10540} \text{ daN}$$

Per disegnare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione  $T$  e  $M$ , occorre determinare la sezione  $x_0$  di taglio nullo e cui corrisponde il momento max positivo e le sezioni  $x_1$  e  $x_2$  di momento nullo.

$$x_0 = \frac{V_A}{q} = \frac{9460}{4000} = \underline{2,37} \text{ mt}$$

$$M_{\max}^+ = V_A x_0 - q \frac{x_0^2}{2} - M_A = 22420 - 11234 - 3000 = \underline{8186} \text{ daNm}$$

Per determinare le sezioni  $x_1$  e  $x_2$  è necessario explicitare la legge di variazione del Momento e imporre l'uguaglianza a 0

$$M(x) = V_A x - q \frac{x^2}{2} - M_A = 0 \quad (\text{equazione di 2° grado})$$

$$M(x) = -\frac{q}{2} x^2 + V_A x - M_A = 0$$

Ricordiamo le soluzioni di un'equazione di 2° grado

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad (\text{discriminante})$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a}$$

Nel caso in esame simultaneo:

$$a = -\frac{q}{2} = -2000 \quad b = V_A = 9460 \quad c = M_A = -3000$$

$$\Delta = \sqrt{9460^2 - (+24000000)} = 8093$$

$$x_{1,2} = \frac{-9460 \pm 8093}{-4000} = \begin{cases} x_1 = \underline{0,34 \text{ m}} \\ x_2 = \underline{4,139 \text{ m}} \end{cases}$$

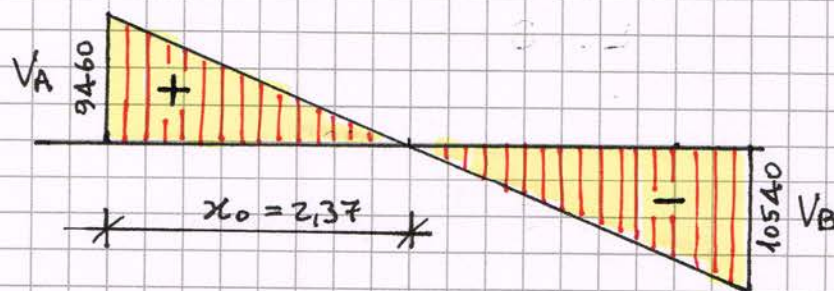


DIAGRAMMA DEL  
TAGLIO

(T)

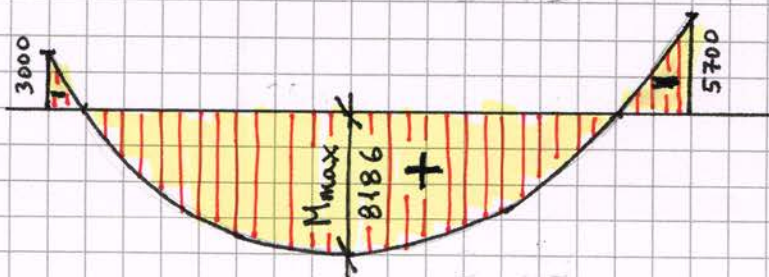


DIAGRAMMA DEL  
MOMENTO

(M)